國立政治大學補助學術活動執行成果報告書

填表日期： 102 年 10 月 28 日

活動類別	■研究團隊 □學術研討會 □出席國際會議發表論文 □讀書會 □鼓勵教師及研究人員申請國科會專題研究計畫 □其他________				
申請人姓名	李明融	服務單位	應數系	職稱	■教師/研究人員 □博士生 □碩士生
電　　話	88055	e-mail	liwei@math.nccu.edu.tw		
實際活動起迄日期	101.9.1~102.10.7	活動地點	研究大樓 0604/ 逢甲航太風洞實驗室		
活動名稱	（中文）守恆律 （英文）Conservation Law				

成 果 摘 要

成果報告至少應包括下列各項，本頁不敷使用請自行加頁，成果報告內容將於研發處網頁公告，以分享執行成果。

一、內容摘要
1. 參與人數
2. 主協辦單位
3. 論文題目、各計畫名稱、讀書會名稱或研討會議程（中、英文）

二、重要結論或研究成果（中英文論文、期刊、光碟、出版或獲校外研究經費補助）

三、建議

四、相關聯結(活動網頁、與本學術活動有關聯結…)

備註：
1.檢附資料請以電子檔為優先
2.補助出席國際會議者，另應檢附攜回資料名稱及內容
3.如有活動照片，可檢附

備註:本執行成果報告應於活動執行完畢後一個月內提出。

一、內容摘要

1 參與人數:

教師共 6 人　博士班(含校外)學生計 4 人　校外研究生計 4 人 大學部學生計 8 人

2. 主協辦單位: 應數系/心理系/逢甲航太系

3. 論文題目、各計畫名稱、讀書會名稱或研討會議程（中、英文）

整合型計畫研究項目

計畫項目	主持人	服務單位/系所	計畫名稱
總計畫	李明融	應數系	Conservation Law
子計畫一	李明融/謝宗翰 白仁德/張裕隆	應數系/逢甲航太系 地政系/心理系	Numeric computations on the data obtained from supersonic wind tunnel through parabola method
子計畫二	李明融/謝宗翰 白仁德/張裕隆	應數系/逢甲航太系 地政系/心理系	Physical explanations on the Phenomena of Computational results
子計畫三	李明融/謝宗翰 白仁德/張裕隆	應數系/逢甲航太系 地政系/心理系	Parabola method in Particle

研究總目標、研究重點及其在學術上或應用之價值

研究總目標

1 利用(超音速風洞中葉片)實驗數據、資料，企圖建立適切之數學模型，借以估算各實驗最適切之逼近係數。

2 將此研究盡可能發表於 SCI 或 SCIE 或 SSCI 的國際期刊中。

研究重點

1. 建立葉片幾何對各種流場的影響關係圖形。

2. 由上述資訊作分類與計算研究，因有子計畫一。

3. 自 2 結果作出合理的解釋 企圖建立適切之數學模型 並作分類供與下一步之研究

參考，因有子計畫二。

4.再進一不的建立更精確之數學模型時，我們將進一步計算(多重網格或調適性網格)因此子計畫三。

學術上或應用之價值

1. 實質上我們也不知道是否會有甚麼實際的應用 ； 但是，至少此一研究我們將進一步施之於風力發電機之葉片設計上。

2. 雖然我們不知道是否會有甚麼實際的應用，但是我們將進一步發展的數值計算方法確實對航太上的數值計算應用將有相當大革命性的影響　此一計算法應該會被大量引用，尤其在火箭/飛行載具/衛星運載上的運用。

3.於10月5日以前述計算法用於Endem- Fowler方程發現理論與計算多處謀合 因寫下文 On the positive solution of nonlinear differential equation t^2u'' $t^2u''=u^n, n>1$ 投至國際期刊 electric journal of differential equations.(sci) 至今已穫正面回應 (有條件接受刊登此文發表至該期刊)

各子計畫間關聯及整體計畫之協調整合

1. 子計畫一與子計畫二，子計畫三分別爲此計畫之特別情況，將之整合即成完整研究。

2. 子計畫一屬於實驗部份，經過多年奮鬥，在逢甲大學附近我們已準備好超音速風洞，準備作實驗 ； 只要人員備齊，即可進行實驗，應較易獲得結果，將子計畫一之想法。

3. 推廣或修正成可能有用之資訊用於子計畫二與子計畫三。

參與研究人力及分工情形

1. 應數系李明融副教授，白仁德教授負責將資料建立適切之數學模型並繕寫文章。

2. 逢甲航太系謝宗翰教授負責資料收集並檢驗研究成果應用於實際之有效性。

3. 地政系白仁德教授/逢甲航太系謝宗翰教授負責資料作離散化分析與科學計算。

二、重要結論或研究成果（中英文論文、期刊、光碟、出版或獲校外研究經費補助）

1. 於2013年10月5日以上述計算法用於Endem- Fowler方程發現理論與計算多處謀合 因與逢甲大學航太博士生李育佐合寫下文 On the positive solution of nonlinear differential equation $t^2u''=u^n, n>1$ 投至國際期刊 electric journal of differential equations.(sci) 至今已穫正面回應(有條件接受刊登此文發表至該期刊)

2. 於2012年12月15日與逢甲航太系謝宗翰教授合作一文

非定常極音速震波建模數值研究

(Numerical Study of Unsteady Hypersonic Shock modeling

發表於 **中華民國航太學會學術研討會** 新竹, 2012 AASRC Conference

三、建議

經費實在太少　交通費 差旅費亦應可由此研究團隊支付較合理

四、相關聯結(活動網頁、與本學術活動有關聯結…)

與逢甲航太系謝宗翰教授合影於超音速風洞實驗室

非定常極音速震波建模數值研究

謝宗翰[1*]，李明融[2]，陳旻均[1]
[1]逢甲大學航太與系統工程學系、台中市 40724 西屯區文華路 100 號
[2]國立政治大學應用數學系、台北市 11605 文山區指南路二段 64 號

摘要

本文透過一維非定常Euler方程之有限體積法計算程式，數值計算並分析震波管內兩側不同氣體間之接觸面移動時產生的流場問題。以考慮一多重氣體之附加能量守恆方程為基礎，利用AUSMDV黎曼求解法，分別對2種不同之二階通量限制器與數種梯度差分法進行系列的數值處理與比較分析，探討其優缺點並確認計算程序之可靠度。能量或壓力之計算結果顯示，階數高的梯度計算法可提升捕捉膨脹波區域之波傳能力。

關鍵字：Euler 方程，黎曼求解法，通量限制器，接觸不連續，數值振盪，震波捕捉，梯度數值法

Numerical Study of Unsteady Hypersonic Shock modelling

Tzong-Hann Shieh[1*]，Meng-Rong Li[2]，Min-Chun Chen[1]
[1] Department of Aerospace and Systems Engineering、Feng Chia University、
No. 100 Wenhwa Rd., Seatwen, Taichung, Taiwan 40724, R.O.C.
[2]Department of Mathematical Sciences、National Chengchi University、
No. 64, Sec. 2, ZhiNan Rd., Wenshan District, Taipei City 11605, Taiwan R.O.C.

Abstract

In this study, a finite volume method computing code of 1D unsteady Euler equations computes the flow field problem due to moving contact discontinuity face between two different species on both sides of the shock tube. Consider the additional energy conservation equation and use the AUSMDV Riemann solver to compute and compare the 2 different kinds of flux limiters. Base on the additional energy conservation equation, consider the different gradients and computing methods to analyze and validate the computing accuracy of this researched code. The numerical result show that, the higher gradient methods can improve the capturing capability of wave propagation in the area of expansion waves, but the non-physical oscillations are reinforced near the contact discontinuity clearly. However, such problems of numerical oscillations can be reduced by the modified calculating loop significantly.

Keywords：Euler equations, Riemann solver, flux limiter, contact discontinuity, numerical oscillation, shock capturing, gradient method

* 通訊作者
聯絡方式：E-mail: thshieh@fcu.edu.tw; TEL: (04)24517250~3960

一、 前言

當太空飛行載具再次進入大氣層的飛行過程中，極音速之黏性熱流所造成的高溫將會導致飛行載具熔化性破壞。在此飛行過程中所面臨之高溫、高速、高壓的熱流環境，即所謂的高焓流動(high enthalpy flow)。這類極音速、真實混合氣體之熱氣動力環境的實驗模擬與數值近似分析，在目前航太領域方面是相當重要的研究主題之一。

此熱流環境可透過高焓震波管(high enthalpy shock tunnel)實驗設備近似模擬。然而，針對模擬實驗所產生之非定常流場，特別是震波管內兩側氣體間接觸面移動過程中，所引起的流場問題，我們以近似Riemann求解法(approximate Riemann solver)進行數值模擬時，將於接觸不連續面(contact discontinuity)與震波(shock wave)前後產生非物理性數值震盪。這些數值震盪將會造成數值模擬與真實流場的誤差現象。因此，針對上述熱氣動力之數值分析與實驗模擬，尤其是震波管內兩側不同氣體之移動的接觸面，所產生的非定常熱流場問題中，探討如何改善這些非物理性震盪問題，對高焓流場問題之數值計算研究而言是非常重要的，並且對於進一步探討如何有效捕捉震波等研究，更是相當重要的基礎研究工作之一。

針對上述非定常極音速流場中所面臨之Riemann問題，將描述流體狀態之守恆方程進行數值求解時，基於Riemann問題為“非線性”之現象，因此直接進行數值求解的過程中將會出現一定計算難度。因此，最早於1950年代，Godunov[6]提出了一種：利用前一時間點之資訊且包含守恆架構的方法， 處理上述針對單一理想氣體之離散守恆方程，可獲得精確的解析解。此外，van Leer於1979年發展了MUSCL數值重建法並建立了TVD算則，使得數值計算的過程中，可以獲得高階精度的結果。而Wada與Liou[8]於1994年，提出了通量裂解算則之AUSMDV近似Riemann求解法，該求解法主要以AUSM算則為基礎所發展出的改進上風裂解算則。將數值通量算則(numerical flux)結合通量限制器(flux limiter)，可以進一步提高計算精度，並透過此計算法使用於高解析度(high resolution)之數值計算中，可避免某些區域產生劇烈震盪，特別是震波與接觸不連續的位置。

本文研究將以震波管(shock tube)中所面臨之Riemann問題為基礎進行數值求解和系統計算，探討上述之移動的接觸不連續面與震波前後緣的非物理震盪問題。首先，以單一氣體條件，測試本研究之計算模型的震波捕捉能力。並加入不同之限制器，並比較其震波捕捉之精度及修正數值震盪的能力。其後，針對考慮多重混合氣體附加能量方程式所產生之源項Q中的壓力梯度與速度梯度，提出數種不同的梯度計算方法，改善源項造成的能量與壓力等參數在移動震波與接觸不連續之位置附近產生的逼近誤差問題。針對所有測試結果進行系統交叉分析與討論。

二、 計算方法

本文透過數值求解一維非定常 Euler 方程[1][2][4][5][6][7]計算分析震波管內兩側氣體間之接觸面的移動時所引起的流場問題[4][5][7]。

基本 Euler 質量、動量與能量守恆方程無法整描述震波與接觸不連續現象，為了正確處理計算問題，本文將積分方程組擴展為多重氣體混合之形式，因此可將針對理想混合氣體之一維Euler方程描述為以下形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V U\,dx+\int_{\partial V}F\,dA=\int_V Q\,dx \qquad (1)$$

其中， V 為體積(volume)、∂V 為體積表面、U 為守恆變數之向量關係及F為無磨擦通量向量(frictionless flux vector)、Q 為源項(source terms)之向量參數。上述向量參數可以分別表達如下：

$$U=\begin{bmatrix}\rho_i\\ \rho u\\ \rho_i E_i\\ \rho E\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}\rho_i u\\ \rho u^2\\ \rho_i E_i u\\ \rho E u\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ P\\ 0\\ Pu\end{bmatrix} \qquad (2)$$

上式中ρ代表流體之密度，而u,v,w分別為直角座標系統下之三個速度分量，E則為流體總能

量，其中流體通量張量F亦可定義為非黏性通量，此外，Q則定義如下：

$$Q=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\left(Y_i u\dfrac{\partial}{\partial x}P+\dfrac{P_i P}{\gamma_i \sum_{j=i}^{ns}\dfrac{P_j}{\gamma_j}}\dfrac{\partial}{\partial x}u\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

本文採用有限體積法，通過利用震波捕捉算則，求解上述一維非定常可壓縮 Euler 守恆方程(1)-(3)發展一維的 Euler 計算程序[4]，同時以二階迎風算則的求解法並結合兩步式顯性的 Runge-Kutta 方法處理時間的離散以及應用 TVD 格式限制器的 MUSCL 重建法結合 Superbee 及 Van Leer 兩種二階通量限制器[1][6]與 AUSMDV [3][4][6][7][8]黎曼求解法處理空間的離散和處理可壓縮高音速流動時的數值通量問題。

三、 計算條件與結果

3.1 研究問題之初始條件設定

本文以同一氣體作為震波管內兩側氣體間之接觸面的移動時所引起的流場計算問題。問題的邊界條件將統一設定為：空間離散步進大小為 0.01、穩定因子(CFL)為 0.9 以及最大時間步進數控制在 20000，其中單一氣體參數採用空氣(Air)，其熱力學參數：分子質量 W 為 28.97、氣體常數 R 為 0.287 而比熱比值 γ 為 1.4。

表 1 震波管測試問題之單一氣體初始條件

空氣 (Air)	ρ_1	ρ_2	u	P	Y_1	Y_2	x
左側氣體條件(left, l)	1	0	0	1	1	0	$x<0.5$
右側氣體條件(right, r)	0.8	0	0	0.2	1	0	$x\geq 0.5$

本文所使用之參考解其條件設定：空間離散間距為 0.0001、穩定因子為 0.9、限制器使用 van Leer 限制器而時間步進法則採用二階 Runge-Kutta 方法。使用極小位移步進、較高的穩定因子並搭配較穩定之限制器與時間步進法，可避免產生數值震盪問題且獲得接近精準解之參考條件。

由於本文所測試之計算程式期望達到精準且具有高計算效能之震波捕捉能力。為有效地針對測試問題提出良好的計算模型，本文使用了震波管問題之初始條件設定驗證新的梯度模型。其震波管薄膜左右側之條件，如表 1 所示，限制器部分分別採用 Superbee 與 van Leer 限制器，其中，Superbee 限制器之限制函數 ϕ_{SB} 為：

$$\phi_{\mathrm{SB}}=\max\{0,\min\{1,2r\},\min\{r,2\}\} \tag{4}$$

而 van Leer 限制器之限制函數 ϕ_{vL} 為：

$$\phi_{\mathrm{vL}}=\frac{r+|r|}{1+|r|} \tag{5}$$

時間步進設定於 0.33 時終止，且初始震波管中央薄膜位置於 0.5。

3.2 源項 Q 之數值逼近問題

由考慮多重氣體條件所推導出之能量方程中，我們得到一個附加能量項之非守恆源項Q，其中包含了兩個梯度問題，分別為壓力梯度$\partial P/\partial x$與速度梯度$\partial u/\partial x$。針對梯度部分，我們首先選擇了最簡化的一階前向差分(FD)形式，並且選擇時間步進法為二階Runge- Kutta方法、限制器選擇 van Leer與Superbee限制器，進行我們初步的測試。

3.2.1 接觸不連續面前後之逼近誤差

透過接觸不連續之雙重氣體初始條件，如表2所示，測試包含附加能量項之計算程式。

表 2 接觸不連續之雙重氣體初始條件

空氣(Air) & 氦氣(He)	ρ_1	ρ_2	u	P	Y_1	Y_2	x
左側氣體條件(left, l)	1	0	1	1	1	0	$x<0.25$
右側氣體條件(right, r)	0	0.5	1	1	0	1	$x\geq 0.25$

首先由密度 ρ 之關係圖1觀察程式捕捉不連續面之能力。圖中接觸不連續面之部分，由於初始條件之位移步進間距(Δx)大且我們選擇了精度較低之二階Runge- Kutta 時間步進法，會使捕捉不連續面之垂直特徵時，在轉角處顯得平滑。但由圖中我們可以發現，除了初始條件以及數值方法所造成的誤差之外，捕捉接觸不連續面發生位置是相當精確的。

確認考慮附加能量項之計算程式震波捕捉的能力後，本研究進一步檢視比熱比值γ 之關係。

由於比熱比值為溫度的函數$\gamma(T)$，而溫度會受能量ρE與壓力P項之影響，討論比熱比值之關係可以確定考慮附加能量項下，是否造成其他相關條件受到影響。

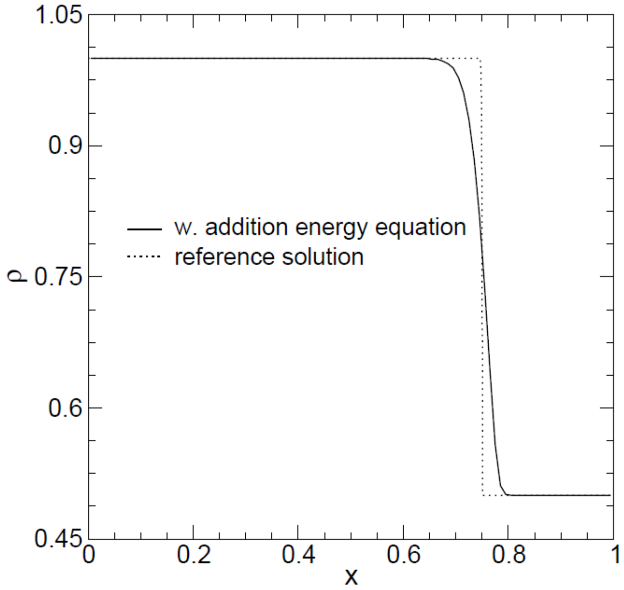

圖1 考慮附加能量項之密度關係圖

然而，由比熱比值γ關係圖2，發現於接觸不連續面前緣產生了非物理數值逼近問題，此問題可能主要來自非守恆源項Q。

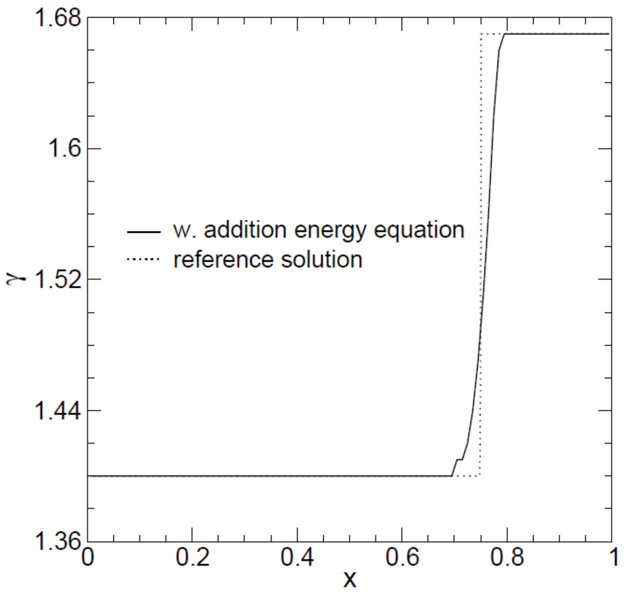

圖2 考慮附加能量項之比熱比值關係圖

為了改善此數值逼近誤差問題，以下將加入新的梯度差分方法，嘗試消除此問題。針對此部分，為了確認計算程式之源項計算能力，考慮以單一氣體測試條件，這是由於理想狀態下，單一氣體之下總能量ρE（或總壓P）與透過附加能量項計算出之個別能量ρiEi（或分壓Pi)應須得到相同的結果。因此，以下將討論不同形式梯度計算對包含附加能量項之計算程式的影響。

3.2.2 單一氣體條件下不同梯度差分法之比較

梯度差分形式考慮一階差分以及二階差分法分析，並討論改變差分形式是否能有效改善數值震盪及震波、接觸不連續之結果預測失準的問題。

首先我們以Taylor 展開之梯度模型方程為基礎，如式(6)：

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(\Delta x) + O\left((\Delta x)^2\right) \qquad (6)$$

討論至二次導數之部分，本文所使用之差分形式，如表3所示。

表 3 研究採用之一、二次導數差分法

導數($derivative$)	前向差分法(FD)	後向差分法(BD)	中央差分法(CD)
$(\partial f/\partial x)$	✓	✓	✓
$(\partial^2 f/\partial x^2)$	✓		✓

為避免差分方式混淆，通用之差分法與導數形式於分析時以及比較圖之部分，皆以表4呈現。

表 4 導數與通用參數之表示方式

導數($derivative$)	上標	差分法($difference$)	標示符號
$(\partial f/\partial x)$	1	前向差分法(FD)	F
$(\partial^2 f/\partial x^2)$	2	後向差分法(BD)	B
		中央差分法(CD)	C

例如：一次導數使用前向差分法(FD)、二次導數使用後向差分法(BD)，我們將以“F_1B_2”表示。

在此，一次導數我們選擇前向差分法主要的目的是為了避免計算邊界時並無參數數值，導致初始運算便產生誤差，因此在一階導數的部份本研究多採用前向差分之形式。

然而，二次導數我們也嘗試過前向差分形式，若初始梯度差分便使用前向差分或後向差分，在單一氣體會產生計算錯誤，出現“巨大震盪”，並於約兩個步進數後發散。在雙重氣體的條件下可完成整個運算，但亦產生“巨大震盪”，導致無法捕捉震波與接觸不連續部分。因此在這些部分僅考慮一階梯度F_1與二階梯度F_1C_2之形式。

在此一階梯度F_1、二階梯度F_1C_2分別使用兩種限制器van Leer及Superbee討論提高一個階數

之梯度，是否可改善能量ρE 與ρ 之非物理震盪問題。以下分別為密度ρ關係圖3以及個別能量ρiEi關係圖4說明。

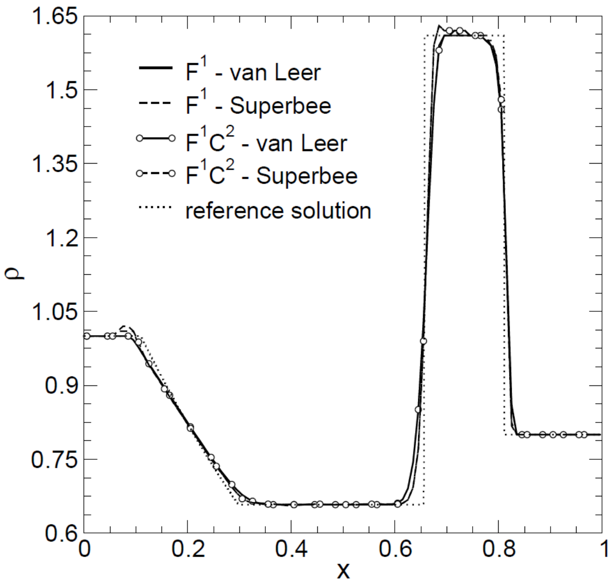

圖3 加入一次、二次導數之密度關係圖

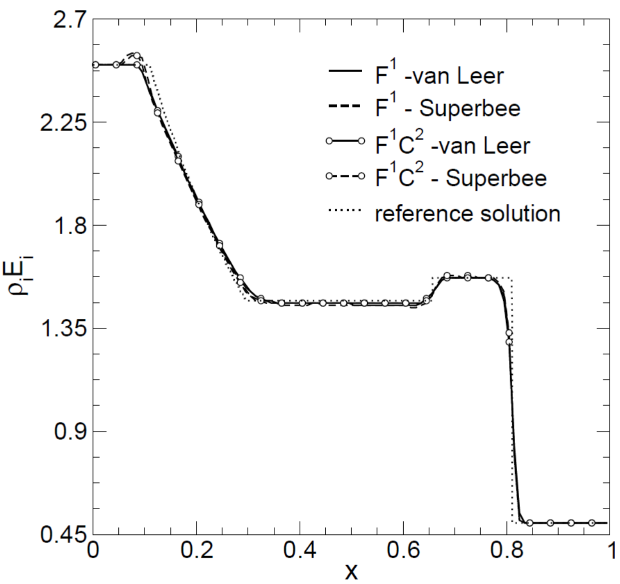

圖4 加入一次、二次導數之個別能量關係圖

從密度ρ關係圖3，可以觀察提高梯度之階數是否可以有效地提升震波捕捉能力，我們分別將四個局部區域放大檢視。

由局部放大圖，可觀察出使用van Leer限制器下，膨脹波前緣以及接觸不連續面甫發生垂直度之位置使用一階或二階差分方式並無明顯改善，但於震波與接觸不連續面間之區域，如圖7所示。

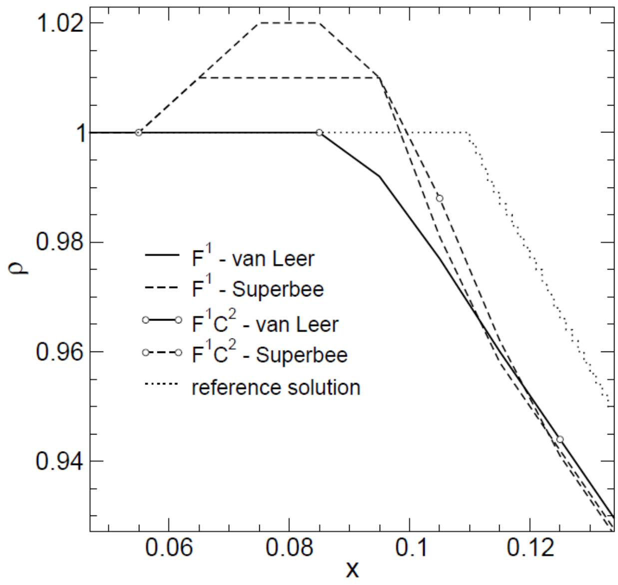

圖5 加入一、二次導數之密度局部放大圖Zoom1

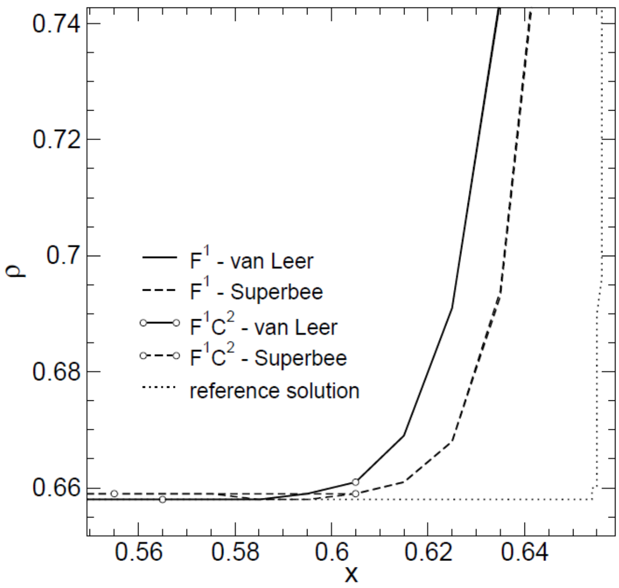

圖6 加入一、二次導數之密度局部放大圖Zoom2

二階差分方式雖然仍具有部分震盪問題但於震波前、後緣位置垂直度略為提升；若使用Superbee限制器於膨脹波前緣震盪位置往x 正方向移動，且捕捉膨脹波位置的部分得到改善，而接觸不連續位置也可看出垂直度有些微地變佳，Zoom3及Zoom4與van Leer限制器相似。

從能量ρE關係圖中，我們可以觀察改變梯度差分方式是否能改善能量預測失準之問題，以下我們將能量關係圖4局部放大分析。

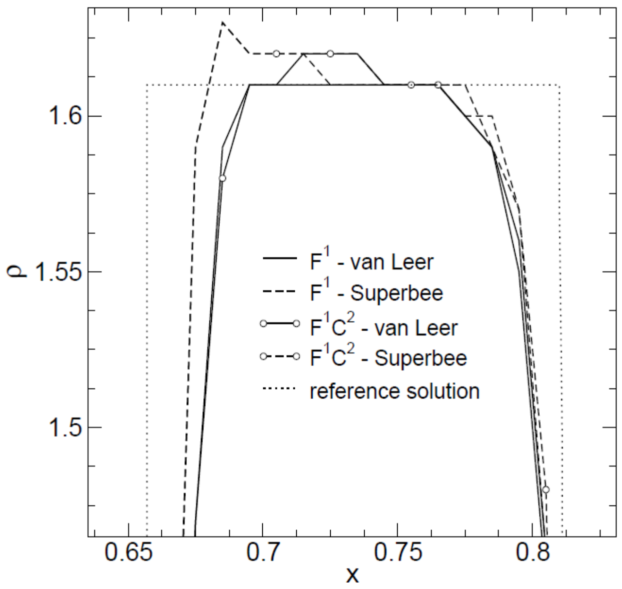

圖7 加入一、二次導數之密度局部放大圖Zoom3

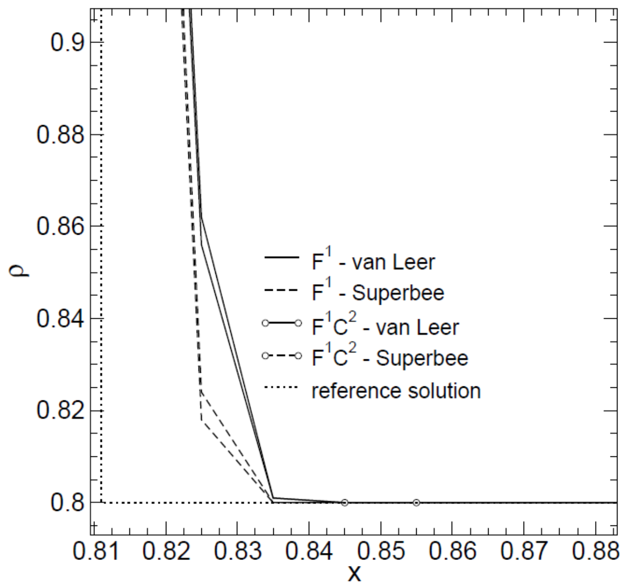

圖8 加入一、二次導數之密度局部放大圖Zoom4

由能量局部放大圖中可觀察出在膨脹波前緣，並沒有如密度ρ部分，提高梯度階數產生較大的震盪，由Superbee限制器結果發現，降低了震盪並且垂直度明顯地改善，特別是Zoom3，接觸不連續面的震盪問題明顯地改善，於震波與接觸不連續之間的區域震盪也降低。但透過局部放大圖可發現Superbee於膨脹波前緣後至接觸不連續位置前能量之數值明顯地預測不足。

透過能量與密度之關係，如圖3與圖4可觀察出，提高梯度階數能改善能量預測失準之問題，特別是接觸不連續位置，明顯地降低震盪問題。

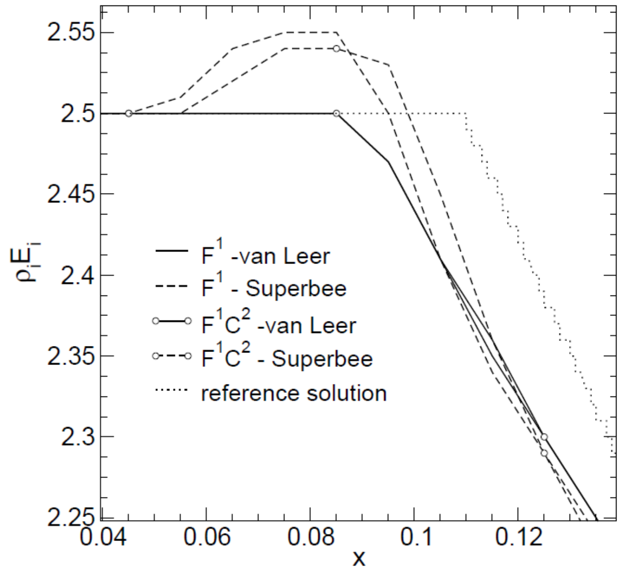

圖9 一、二次導數之個別能量局部放大圖Zoom1

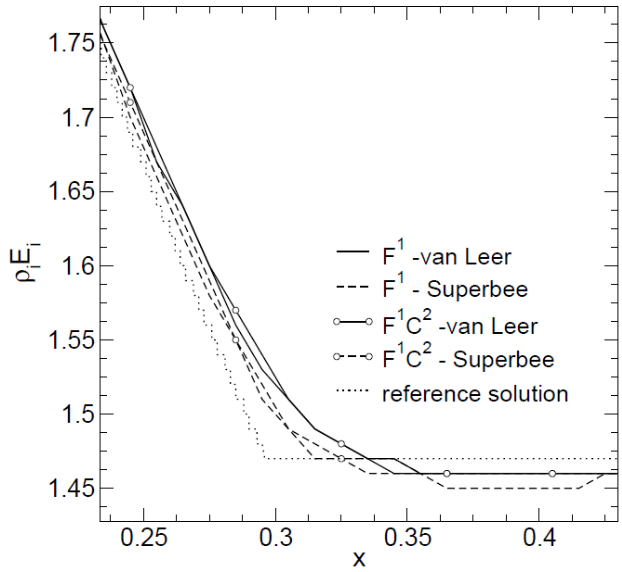

圖10 加入一、二次導數之密度局部放大圖Zoom2

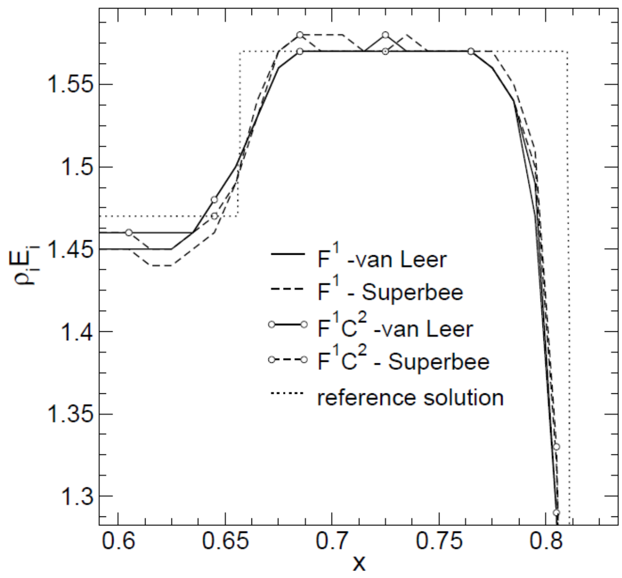

圖11 加入一、二次導數之密度局部放大圖Zoom3

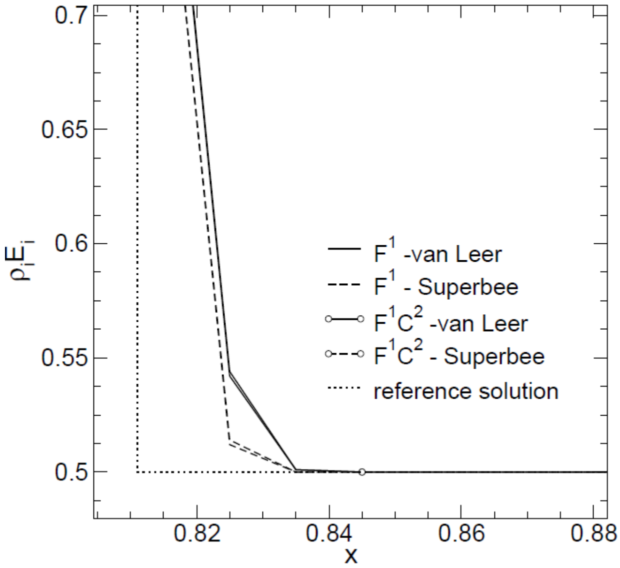

圖 12 加入一、二次導數之密度局部放大圖 Zoom3

四、 結論

本論文研究探討非定常極音速流場 Riemann 問題，藉由一附加能量方程式數值分析多重氣體混合的流場現象。但由於附加能量方程式會產生非守恆源項 Q 造成數值計算出現誤差與非物理性震盪。為此，本論文考慮震波管問題於震波管內兩側採用不同氣體條件，並以近似 Riemann 求解法 AUSMDV 算則為基礎，分別對數種不同梯度差分法以及 2 種二階通量限制器進行一系列數值計算與分析。藉此建立本論文研究問題之分析架構並為日後欲建立的新計算模型與方法提供良好基礎。首先，以兩種壓力梯度法關係修正附加能量方程中非守恆源項 Q 之壓力參數，其測試結果顯示：

梯度差分參數過多將產生大量截斷誤差，並使得需要精密計算之震波與接觸不連續區域產生“巨大震盪”，特別在能量部分會產生預測失準問題。因此，梯度計算部分，其梯度差分法使用二階算則，並透過修正計算迴圈方式提高計算精度。而壓力梯度部分，修正計算程式中壓力運算函數，加入混合氣體計算程序較能有效改善能量 ρE 或比熱比值 γ 之數值震盪及震波位置能量預測失準問題。

通量限制器測試結果顯示，分段線性限制函數之二階通量限制器 Superbee 對接觸不連續與震波發生位置其計算精度較高，但於此高梯度前區域則會產生數值震盪，特別在處理雙重氣體條件下格外顯著，而具有平滑特質之 van Leer 二階通量限制器雖然於高梯度區域計算精度不如 Superbee 但最少出現數值震盪問題。

以本文研究測試結果為基礎，未來針對此研究問題，梯度差分階數將控制於二階精度，並直接修改壓力運算函數關係，嘗試修正附加能量方程源項 Q 所造成之逼近誤差問題；然而，針對研究問題結合其他特性限制器發展出合適的通量限制函數案例，將平滑型限制器與於震波與接觸不連續位置計算精度高之限制器結合，發展出適用於非定常極音速流場問題的限制器；時間步進方面，則可以嘗試高階 Runge-Kutta 方法進行時間計算。以本研究所建立之基本分析架構，未來亦可將研究問題延伸。例如：考慮震波管兩側初始時間即氣體混合以及更多氣體條件之流場環境等，進一步驗證、分析數值計算方法的可靠性。

誌謝

本文研究結果由國科會專題計畫 (NSC98-2221-E-035-047-MY3) 之補助支持下得以順利完成特此誌謝。

參考文獻

[1] Hirsch, CH.: CFD Methodology and Validation for Turbomachinery Flows. AGARD Lecture Series on ‘Turbomachinery Design Using CFD’, pp. 4.1-4.17, May to June, 1994.
[2] Jameson, A.; Schmidt, W. and Turkel, E.: Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. AIAA paper 1981-1259, 1981.
[3] Prabhu R. K.: An Approximate Riemann Solver for Thermal and Chemical Nonequilibrium Flows,NASA Contractor Report, 195003, 1994
[4] Shieh, T.-H. and Li, M.-R.: Numeric treatment of contact discontinuity with multi gases, Journal of computational and applied mathematics, Vol. 230, Issue 2, pp. 656-673, 2009.
[5] Shyue K.M.: An Efficient Shock-Capturing Algorithm for Compressible Multicomponent

Problems, Journal of Comp. Phy., 142, 208-242, 1998.
[6] Tannehill, J.C.; Anderson, D.A. and Pletcher, R.H.: "Computational fluid mechanics and heat transfer, second edition," Taylor & Francis, Ltd., 1997.
[7] Ton V. T.: Improved Shock-Capturing Methods for Multicomponent and Reacting Flows, Journal of comp. phy., 128, 237-253, 1996.
[8] Wada, Y. and Liou, M.-S.: A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities, AIAA 94-0083, AIAA 32nd Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV 1994.